

Arithmétique (2)

Nombres premiers

Dans le précédent chapitre d'arithmétique, tu as appris à trouver la liste des diviseurs d'un nombre. En utilisant cette méthode, retrouve tous les diviseurs des nombres suivants :

12 :

15 :

19 :

25 :

27 :



Quelle est la particularité du nombre 19 ?



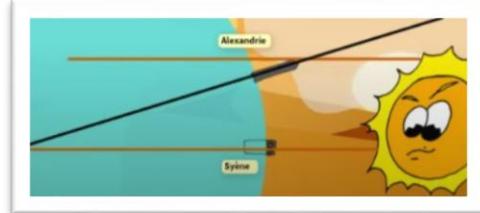
Définition : On dit qu'un nombre entier est **premier**, s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exercice : les nombres suivants sont-ils premiers ?

- 1 :
- 2 :
- 3 :
- 4 :
- 5 :
- 6 :
- 7 :
- 8 :
- 9 :
- 100 :



Un peu d'histoire



Le crible d'Eratosthène pour trouver les nombres premiers inférieurs à 30

Dans le tableau ci-dessous, entourez les nombres premiers et rayez ceux qui ne le sont pas en utilisant la méthode du crible d'Eratosthène :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Les nombres premiers plus petits que 30 sont donc :



Propriété : Tout nombre entier (plus grand ou égal à 2) peut se décomposer de manière unique (à l'ordre des facteurs près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples :

- $15 = 3 \times 5$
- $6 =$
- $14 =$
- $12 =$



Remarques :

- $12 = 4 \times 3$ n'est pas une décomposition de 12 en produit de facteurs premiers car 4 n'est pas un nombre premier.
- $12 = 2 \times 2 \times 3$ est la décomposition de 12 en produit de facteurs premiers. On peut changer l'ordre des facteurs :

$$12 = 2 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$$

Remarque : Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Cela signifie que ces décompositions de 70 en produit de facteurs premiers sont considérées comme identiques :

$$70 = 2 \times 5 \times 7 \quad ; \quad 70 = 5 \times 2 \times 7 \quad ; \quad 70 = 5 \times 7 \times 2 \quad ;$$

$$70 = 2 \times 7 \times 5 \quad ; \quad 70 = 7 \times 5 \times 2 \quad ; \quad 70 = 7 \times 2 \times 5$$



Détaillons sur un exemple, une méthode, que j'appelle « méthode de l'arbre », pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers.



<p>On cherche à décomposer en un produit de facteurs premiers le nombre 60.</p>	<p>Grâce aux critères de divisibilité, on sait que 10 est un diviseur de 60. $60 = 10 \times 6$. On dessine deux nouvelles branches, et sur les feuilles on écrit : 10 et 6.</p>	<p>10 n'est pas premier : $10 = 2 \times 5$. 6 n'est pas premier : $6 = 2 \times 3$. On dessine de nouvelles branches. Sur chacune des nouvelles feuilles on trouve : 2, 3 et 5. Ce sont des nombres premiers. La décomposition est terminée.</p>

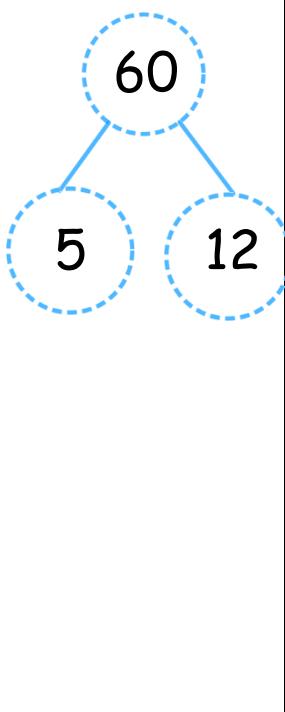
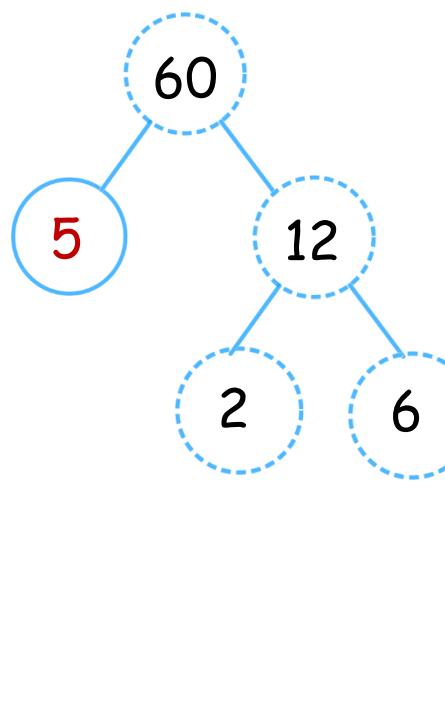
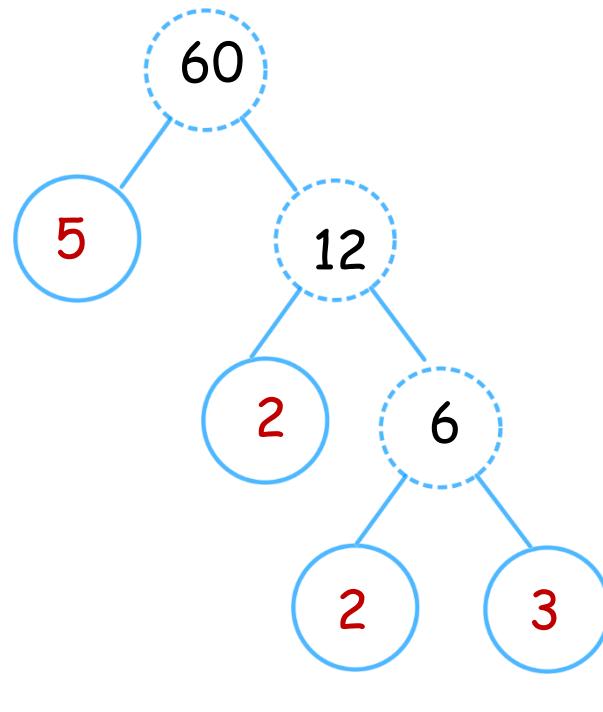
On vient de trouver comme décomposition de 60 en produit de facteurs premiers :

$$60 = 2 \times 5 \times 2 \times 3$$

On a pour habitude d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Cette décomposition est unique, et pourtant au départ, on a choisi le diviser en premier 60 par 10. Vérifions que le résultat final reste le même si on commence en divisant 60 par 5 :

		
<p>Grâce aux critères de divisibilité, on sait que 5 est un diviseur de 60. $60 = 5 \times 12$.</p>	<p>5 est premier, cette branche est terminée. 12 n'est pas premier : $12 = 2 \times 6$.</p>	<p>2 est premier, cette branche est terminée. 6 n'est pas premier : $6 = 2 \times 3$. 2 et 3 sont des nombres premiers, donc ces branches sont terminées.</p>

Donc on retrouve : $60 = 5 \times 2 \times 2 \times 3$

Peu importe l'ordre dans lequel on écrit les diviseurs, on retrouve grâce à cette méthode la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre.

Application : décompose en produit de facteurs premiers : 18 ; 55 ; 68 ; 100.

Remarque : Les nombres premiers ont un arbre de décomposition avec une unique feuille :

Page 5/6

11

17

41

59

Questions flash :

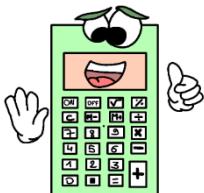


- 1) 6)
- 2) 7)
- 3) 8)
- 4) 9)
- 5) 10)

https://www.youtube.com/watch?v=7P1x_A9EOQI&ab_channel=MathsetJeux



Exercice : Sur ton cahier d'exercices, écris la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants : 24 ; 75 ; 124 ; 429 ; 199 ; 780.



Vérifie à l'aide de la calculatrice :

https://www.youtube.com/watch?v=ahbcHc5yO64&ab_channel=MathsetJeux

Simplifier une fraction

Méthode 1 : On cherche un (ou plusieurs) diviseur commun :

$$\bullet \frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$$



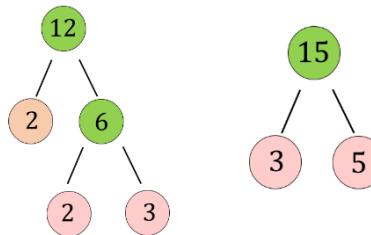
$$\bullet \frac{42}{70} = \frac{6 \times 7}{\cancel{7} \times 10} = \frac{6}{10}$$



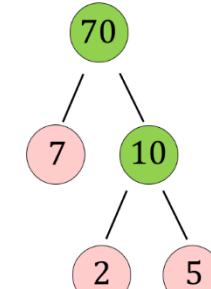
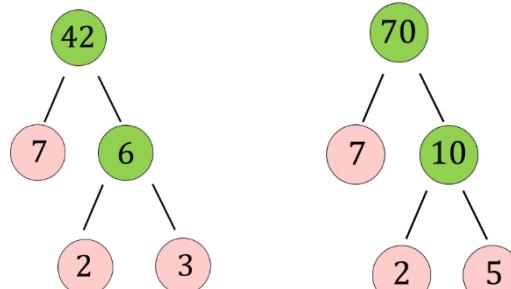
$$\bullet \frac{42}{70} = \frac{\cancel{2} \times 21}{\cancel{2} \times 35} = \frac{21}{35} = \frac{3 \times 7}{\cancel{7} \times 5} = \frac{3}{5}$$

Méthode 2 : On décompose les deux nombres en produit de facteurs premiers :

- $\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 2 \times 2}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$



- $\frac{42}{70} = \frac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{2} \times 5} = \frac{3}{5}$



- $\frac{66}{30} =$

- $\frac{12}{51} =$

- $\frac{126}{100} =$



Classe Genially :