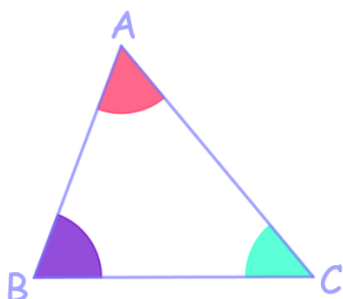


# Triangles et angles : démonstrations



**Propriété 1:** La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ .

## Démonstration

Soit ABC un triangle. Traçons la parallèle à la droite (AC) passant par le sommet B.

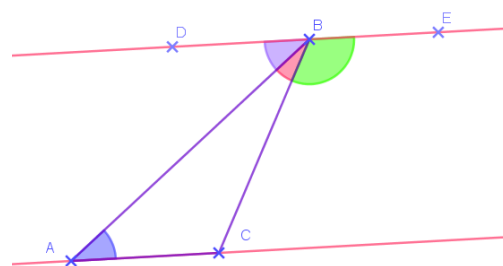
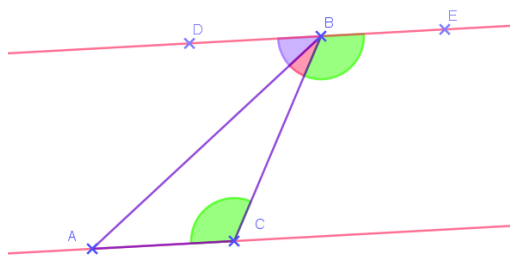
Plaçons D et E sur cette droite de part et d'autre de B (on désignera par D celui des deux points tel que les angles  $\widehat{DBA}$  et  $\widehat{BAC}$  soient alternes-internes).

D, B et E étant alignés,  $\widehat{DBE}$  est un angle plat, il mesure  $180^\circ$ . Donc :

$$\widehat{DBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180^\circ \quad (1)$$

Les droites (DB) et (AC) sont deux parallèles coupées par la sécante (AB) : les angles alternes-internes sont donc de même mesure. On a donc :

$$\widehat{DBA} = \widehat{BAC}$$



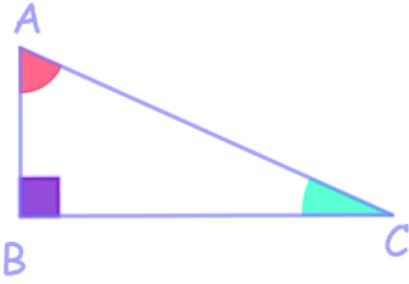
Les droites (DB) et (AC) sont deux parallèles coupées par la sécante (CB) : les angles alternes-internes sont donc de même mesure. On a donc :

$$\widehat{ACB} = \widehat{CBE}$$

En utilisant ces deux égalités de mesures d'angles et l'égalité 1, on obtient :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

Autrement dit, la somme des mesures des 3 angles du triangle ABC est égale à  $180^\circ$ .



**Propriété 2 :** La somme des mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à  $90^\circ$ .

$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

**Définition :** Deux angles dont la somme des mesures est égale à  $90^\circ$  sont appelés angles complémentaires.

La propriété 2 peut s'énoncer de cette façon : « Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires ».

Démonstration :

Considérons un triangle ABC rectangle en B.

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$  (propriété 1).

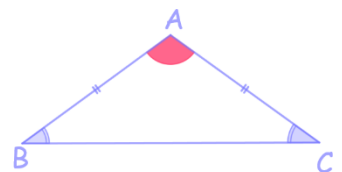
ABC étant rectangle en B, la mesure de l'angle  $\widehat{CBA}$  est égale à  $90^\circ$  (définition du triangle rectangle).

Donc la somme des deux angles aigus est égale à  $180^\circ - 90^\circ$ , soit  $90^\circ$  :

$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

**Propriété 3 :** Les deux angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$



Démonstration :

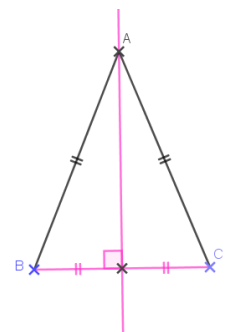
Considérons un triangle ABC isocèle en A.

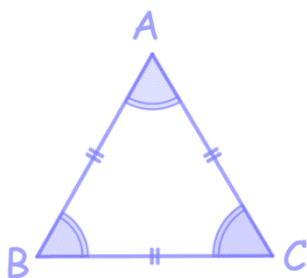
D'après une propriété étudiée l'année dernière, la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie du triangle.

Les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$  sont symétriques par rapport à cette médiatrice.

Or, la symétrie axiale conserve les mesures d'angle.

Donc les angles à la base  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$  ont la même mesure.





**Propriété 4 :** Les trois angles d'un triangle équilatéral ont la même mesure. Cette mesure est égale à  $60^\circ$ .

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^\circ$$

#### Démonstration :

Considérons un triangle  $ABC$  équilatéral. Puisqu'il est équilatéral, ce triangle est en particulier isocèle en  $A$  :  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  d'après la propriété 3.

Ce triangle est aussi isocèle en  $B$  :  $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$  d'après la propriété 3.

En reprenant ces deux égalités :  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$ .

Les trois angles d'un triangle équilatéral ont donc la même mesure.

Or la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$  donc cette mesure est égale au tiers de  $180^\circ$ , c'est-à-dire  $60^\circ$ .