Arithmétique (1) diviseurs et multiples

Dans ce chapitre, nous allons travailler avec des nombres qui sont des entiers naturels.

Définition : Si a et b sont deux entiers naturels non nul, on dit que **b divise a** s'il existe un entier c tel que : $a = b \times c$.

Exemples :

12 divise 24 car $24 = 2 \times 12$.

5 divise 35 car $35 = 7 \times 5$.

Vocabulaire : On dit alors que :

- b divise a
- b est un diviseur de a
- a est un multiple de b
- a est divisible par b

Les exercices suivants sont à chercher dans le cahier d'exercices :

Exercice 1 : Donne une écriture de 100 qui montre que :

1) 100 est un nombre pair.
2) 100 est un multiple de 20.
3) 4 est un diviseur de 100.
4) 5 divise 100.

Exercice 2 : Donne une écriture de 28 qui montre que 7 est un diviseur de 28

Exercice 3 : Ecris la liste des diviseurs de 15

Exercice 4 : Ecris la liste des multiples de 3 inférieurs à 20 :

Exercice 5 : Ecris la liste des multiples de 7 inférieurs à 80

Exercice 6 : Quel est l'ensemble des multiples de 0 ?

Exercice 7 : La somme de deux multiples de 3 est-elle un multiple de 3 ?

Critères de divisibilité : Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- par 10, si son chiffre des unités est 0.

Entraînement :

Questions flash :

Application : Utilise les critères de divisibilité pour répondre aux questions suivantes

1) 5 241 est-il divisible par 2 ?
2) 111 est-il divisible par 3 ?
3) 15 214 est-il divisible par 5 ?
4) 2 109 est-il divisible par 9 ?

Liste des diviseurs d'un nombre

Une première méthode sur un exemple : cherchons tous les diviseurs de 54

Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre, sans en oublier, on pourrait donc se dire qu'il faut tester tous les entiers compris entre 1 et ce nombre.
Ce qui peut faire…beaucoup ! Surtout si ce nombre est grand.
Supposons que ce nombre soit 124, ça voudrait dire effectuer 124 tests !!!
Heureusement, il y a une propriété qui va nous permettre d'aller beaucoup plus vite :

Propriété (admise): Si n désigne un entier qui n'est pas premier, alors n a un diviseur plus petit que $\sqrt{n}$.

Grâce à cette propriété, il suffit de tester tous les entiers compris entre 1 et $\sqrt{124}$.
En effet, si d est un diviseur de 124 alors (124 : d) est aussi un diviseur de 124. On peut donc retrouver tous les diviseurs plus grands que $\sqrt{124}$ à partir des diviseurs inférieurs à $\sqrt{124}$.
Sur notre exemple :
4 est un diviseur de 124 et si je divise 124 par 4, je trouve 21. Donc 4 et 21 sont des diviseurs de 124. J'ai trouvé une paire de diviseurs : (4 ; 21).
Pour avoir la liste complète, on commence par calculer la valeur approchée par défaut à l'unité de $\sqrt{124}$:

$$\sqrt{124} \approx 11$$

On va donc tester tous les entiers compris entre 1 et 11 :

- S'ils sont diviseurs de 124, on les note et on note le diviseur associé
- Sinon, on passe à l'entier suivant

11 tests c'est beaucoup moins que 124 !
Et pour effectuer chacun de ces tests, plusieurs méthodes possibles (tables, critères de divisibilité, effectuer la division euclidienne et comparer le reste à zéro).

Entier d à tester	d est-il diviseur de 124 ?	Si oui, (124 :d) est aussi un diviseur de 124
1	Oui, 1 divise tous les nombres ! 124 = 1 x 124	124
2	Oui, 124 est pair. 124 = 2 x 62	62
~~3~~	Non, car 1+2+4 =7 et 7 n'est pas un multiple de 3.	x
4	Oui, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 4. 124 = 4 x 21	31
~~5~~	Non, car le chiffre des unités de 124 est 5.	x
~~6~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 6.	x
~~7~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 7.	x
~~8~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 8.	x
~~9~~	Non, car 124 n'est pas divisible par 3.	x
~~10~~	Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.	x
~~11~~	Non, car 4+1 =5 et le chiffre des dizaines est 2.	x

Finalement, la liste des diviseurs de 124 est : 1 – 2 – 4 – 31 – 62 – 124

Remarque 1 Tu n'as pas à remplir la colonne du milieu : c'est pour comprendre la méthode, très vite, ton tableau n'aura que deux colonnes.

Remarque 2 Pour écrire la liste des diviseurs dans l'ordre croissant, il te suffit de noter chacun des entiers que tu n'as pas rayés dans le tableau :

Entier d à tester	d est-il diviseur de 124 ?	Si oui, (124 :d) est aussi un diviseur de 124
1	Oui, 1 divise tous les nombres ! 124 = 1 x 124	124
2	Oui, 124 est pair. 124 = 2 x 62	62
~~3~~	Non, car 1+2+4 =7 et 7 n'est pas un multiple de 3.	x
4	Oui, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 4. 124 = 4 x 21	31
~~5~~	Non, car le chiffre des unités de 124 est 5.	x
~~6~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 6.	x
~~7~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 7.	x
~~8~~	Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 8.	x
~~9~~	Non, car 124 n'est pas divisible par 3.	x
~~10~~	Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.	x
~~11~~	Non, car 4+1 =5 et le chiffre des dizaines est 2.	x

Cette méthode ne permet pas de connaître à l'avance le nombre de diviseurs que tu vas trouver. Nous verrons plus tard comment connaître ce nombre, ce qui nous permettra d'être encore plus efficaces.

Résumons la méthode :

Pour trouver la liste des diviseurs d'un entier n :

1) On teste tous les entiers d inférieurs à $\sqrt{n}$:
   - ➔ Si d est un diviseur de n : on ajoute à notre liste d et (n : d)
   - ➔ Sinon on passe à l'entier suivant
2) On écrit cette liste en les rangeant dans l'ordre croissant.

Exercice 8 : écris la liste de tous les diviseurs de 12.

Exercice 9 : écris la liste de tous les diviseurs de 15.

Exercice 10 : écris la liste de tous les diviseurs de 28.

Exercice 11 :

1) Trouve tous les diviseurs de 48.
2) Trouve tous les diviseurs de 100.
3) Trouve tous les diviseurs communs à 48 et à 100.

Problème : Un garçon de café doit répartir 36 croissants et 24 pains au chocolat dans des corbeilles. Chaque corbeille doit avoir le même contenu.
Quelles sont les répartitions possibles ?


Plus petit multiple commun

Exercice résolu : Deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. A minuit, elles s'allument ensemble. Déterminer l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble pour la première fois.

Correction : La première ampoule s'allume tous les multiples de 153s.
La deuxième ampoule s'allume tous les multiples de 187s.
On recherche donc le plus petit multiple commun à 153 et 187.
Pour cela, nous allons construire simultanément le tableau des multiples de 153 et 187 : on s'arrête dès que l'on trouve un multiple commun.

	$\times 1$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\times 8$	$\times 9$	$\times 10$	$\times 11$
Multiples de 153	153	306	459	612	765	918	1071	1224	1377	1530	1683
Multiples de 187	187	374	561	748	935	1122	1309	1496	1683	1 870	

1 683 est le plus petit multiple commun.
1683 = 60 x 28 + 3
1 683s = 28 min 3s
Les deux ampoules clignotent ensemble pour la première fois au bout de 28 min 3s.
La première ampoule se sera allumée 11 fois et la deuxième 9 fois : on le lit dans le tableau.

Exercice 12 : Trouve le plus petit multiple commun à 12 et 18.

Genially :