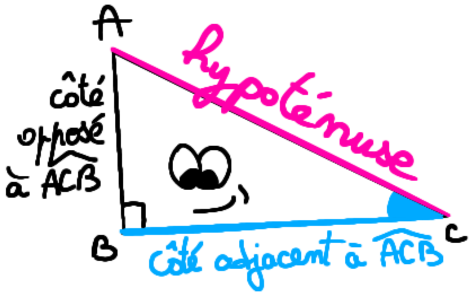
Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle (partie 1)

Quelques rappels

Définition : Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.

Remarque : L'hypoténuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle.

Dans un triangle rectangle, on sait calculer la longueur d'un des côtés connaissant les longueurs des deux autres grâce au théorème de Pythagore.
Dans ce chapitre, nous allons voir une autre méthode permettant de **calculer la longueur** de l'un des côtés **connaissant la mesure d'un angle et la longueur d'un autre côté**.



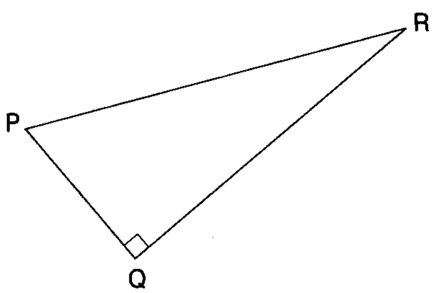
Vocabulaire

Considérons un triangle ABC rectangle en B. Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle, on va donner un nom particulier aux côtés du triangle (autres que l'hypoténuse) en rapport avec cet angle :

[BC] est le **côté adjacent à l'angle** $\widehat{ACB}$
[AB] est le **côté opposé à l'angle** $\widehat{ACB}$

Si on choisit un des deux angles aigus dans un triangle rectangle
- **Le côté adjacent** est celui des deux côtés de l'angle qui n'est pas l'hypoténuse
- **Le côté opposé** est le 3ème côté du triangle

Exemple 1 : Complète les phrases suivantes

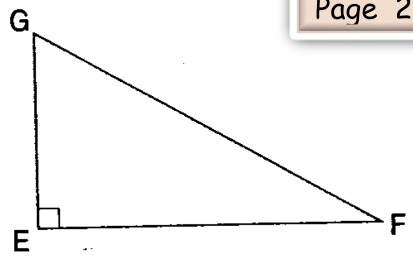


L'hypoténuse du triangle PQR est :………

Le côté adjacent à $\widehat{PRQ}$ est : …………

Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.

Exemple 2 : On s'intéresse à l'angle $\widehat{GFE}$



[FG] est …………………………………

[GE] est ……………………………………

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{GFE}$ est …………….

Questions flash : Reconnaître le côté adjacent d'un angle aigu d'un triangle rectangle

1) ………… 6) …………
2) ………… 7) …………
3) ………… 8) …………
4) ………… 9) …………
5) ………… 10) …………

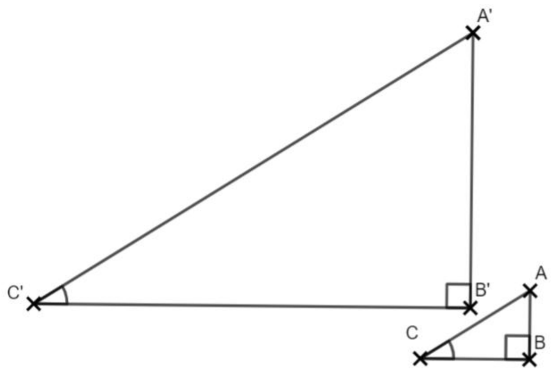
Activité d'introduction

Fichier GeoGebra sur le Genially

Propriété : Si ABC et A'B'C' sont deux triangles rectangles respectivement en B et B' tels que $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, alors les rapports $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{B'C'}{A'C'}$ sont égaux.

Démonstration :

Considérons deux triangles ABC et A'B'C' rectangles respectivement en B et B' tels que $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.



On sait déjà que ces deux triangles ont deux angles de même mesure :

- $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ par hypothèse
- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = 90°$ par hypothèse aussi puisque les triangles sont rectangles en B et B'

Or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Ces deux triangles ont donc leurs 3 angles égaux deux à deux, ils sont donc semblables.
Les triangles sont semblables donc les longueurs des côtés sont proportionnelles.
Le tableau suivant est donc un tableau de proportionnalité :

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	BC	AC
Longueurs des côtés du triangle A'B'C'	A'B'	B'C'	A'C'

Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.

Les produits en croix sont donc égaux, on a donc en particulier :

$$\mathrm{BC} \times \mathrm{A'C'} = \mathrm{AC} \times \mathrm{B'C'}$$

En divisant les deux membres de l'égalité précédente par $AC \times A'C'$ (qui est différent de 0 car les longueurs des côtés des triangles sont différentes de 0), on obtient :

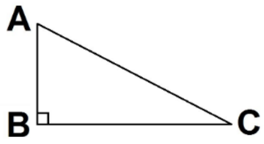
$$\frac{BC \times A'C'}{AC \times A'C'} = \frac{AC \times B'C'}{AC \times A'C'}$$

Puis, en simplifiant les écritures :

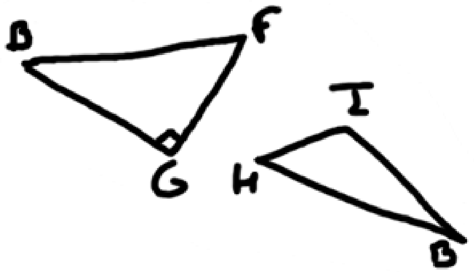
$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}}$$

Définition : Soit ABC un triangle rectangle en B, on appelle cosinus d'un angle aigu $\widehat{BAC}$ le rapport des longueurs noté $cos(\widehat{BAC})$ suivant :

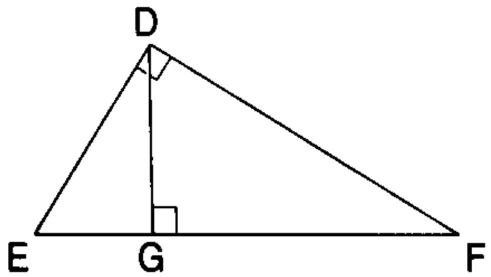
$$cos(\widehat{BAC}) = \frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{BAC}}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$$



Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, écris si possible $cos(\hat{B})$ avec les lettres de la figure



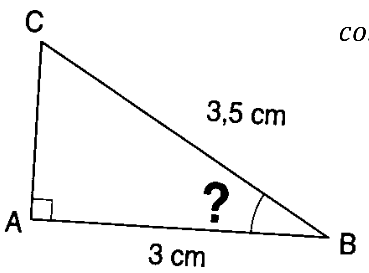
Exercice 2 : Complète les phrases en utilisant la figure ci-dessous



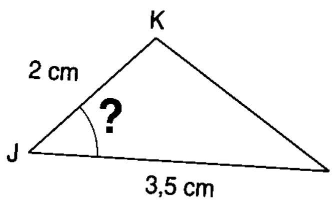
- Dans le triangle rectangle DEF on a
  $\cos(\widehat{\mathrm{DEF}}) =$
- Dans le triangle rectangle GDE on a
  $\cos(\widehat{\mathrm{DEF}}) =$

Exercice 3 : Calcule les cosinus des angles suivants

$cos\ \widehat{\mathrm{CBA}} =$



$cos\ \widehat{\mathrm{KJL}} =$



Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.

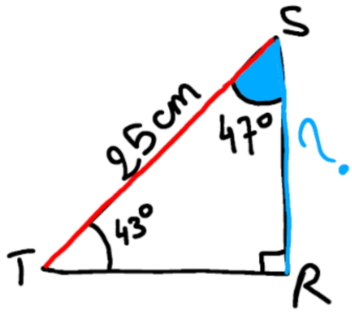
Questions flash : Ecrire la formule du cosinus d'un angle aigu

1) …………
2) …………
3) …………
4) …………
5) …………
6) …………
7) …………
8) …………
9) …………
10) …………

Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit

Exemple corrigé : RST est un triangle rectangle en R tel que $\widehat{RST} = 47°$, $\widehat{RTS} = 43°$ et $ST = 25cm$. Calcule RS. Tu donneras une valeur arrondie au centimètre.

On fait un schéma codé. On ***repasse en couleur*** *le* ***côté que l'on recherche*** *l'****hypoténuse*** *et* ***l'angle dont [RS] est le côté adjacent*** *:*



Grâce à ce schéma, on pense à calculer le cosinus de l'angle $\widehat{RST}$.

RST est un triangle rectangle en R.	*On cite les données de l'exercice qui sont nécessaires pour calculer le cosinus d'un angle*
$\cos(\widehat{RST}) = \dfrac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{RST}}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$	*Les couleurs sur le schéma ont mis en évidence l'angle dont on va calculer le cosinus.*
$\cos(\widehat{RST}) = \dfrac{SR}{ST}$ $\cos(47°) = \dfrac{SR}{25}$	*On écrit la formule avec les lettres de l'exercice, puis avec les données numériques.*
$\dfrac{\cos(47°)}{1} = \dfrac{SR}{25}$ $SR = \dfrac{25 \times \cos(47°)}{1}$ *Si ça t'aide, tu peux revenir au tableau de proportionnalité :* cos(47°) | SR 1 | 25	*On retrouve une égalité de quotients. On utilise le produit en croix pour écrire la formule permettant de calculer SR.*

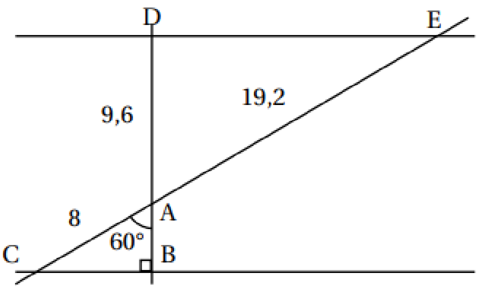
$\cos(47°)$	SR
1	25

Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.

$SR \approx 17$	*On calcule une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.*
[SR] mesure environ 17 cm.	On répond à la question

Exercice (d'après DNB centres étrangers 2022) :

On considère la figure suivante, où toutes les longueurs sont données en centimètre. Les points C, A et E sont alignés et les points B, A et D sont alignés. La figure n'est pas représentée en vraie grandeur.



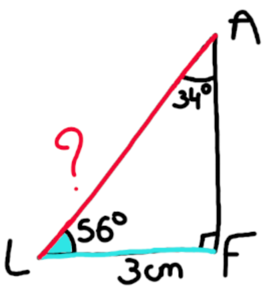
Prouver que le segment [AB] mesure 4 cm.

Correction en vidéo

Calculer la longueur de l'hypoténuse

Exercice corrigé : ALF est un triangle rectangle en F tel que $\widehat{FAL} = 34°$, $\widehat{ALF} = 56°$ et FL = 3cm. Calcule la longueur de l'hypoténuse.

Schéma :



On fait un schéma codé sur lequel on ***repasse en couleur*** *le* ***côté*** *l'****hypoténuse, le côté dont on connaît la longueur ainsi que l'angle dont c'est le côté adjacent****.*

Grâce à ce schéma, on pense à calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ALF}$.

ALF est un triangle rectangle en F.	*On cite les données de l'exercice qui sont nécessaires pour calculer le cosinus d'un angle*

Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.

$\cos(\widehat{ALF}) = \dfrac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{ALF}}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$	*On repère le cosinus d'un angle où intervient une longueur connue.*
$\cos(\widehat{ALF}) = \dfrac{FL}{AL}$ $\cos(56°) = \dfrac{3}{AL}$	*On écrit la formule avec les lettres de l'exercice, puis avec les données numériques.*
$\dfrac{\cos(56°)}{1} = \dfrac{3}{AL}$ $AL = \dfrac{3 \times 1}{\cos(56°)}$	*On retrouve une égalité de quotients. On utilise le produit en croix pour écrire la formule permettant de calculer SR.*
$AL \approx 5{,}4$	*On calcule une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.*
[AL] mesure environ 5,4 cm.	*On répond à la question.*

Exercice (d'après DNB Polynésie juillet 2019) Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2). Calcule DM.

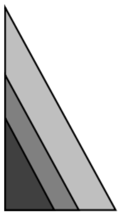


Figure 1

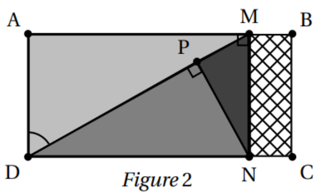


Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :

- le triangle ADM est rectangle en A
- AD = 2 m
- $\widehat{ADM} = 60°$

Classe Genially :

Juliette Hernando https://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Elisabeth Pierront.